

MATHEMATICS

Third Paper : Vector Calculus and Geometry

Time allowed : Three hours

**Maximum Marks 75 for
Science 66 for Arts.**

Part - A

1. Write the equation of the conic in its simplest form.
शाकव की समीकरण का सरलतम रूप लिखिये।
2. Find the polar equation of a straight line.
सरल रेखा को ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिये।
3. Show that the following equations represent the same conic.
सिद्ध कीजिये कि निम्न समीकरण एक ही शाकव को निरूपित करते हैं।
$$\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \& \quad \frac{\ell}{r} = -1 + e \cos \theta$$
4. Find the condition that the plane $Ax + By + Cz + D = 0$ may be a tangent plane to the sphere.
वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये ताकि समतल $Ax + By + Cz + D = 0$ निम्न गोले का स्पर्श समतल हो।

<http://www.rtuonline.com>

ma9300930012@gmail.com

Whatsapp @ 9300930012

Your old paper & get 10/-

पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से

PTO

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

5. Define Reciprocal cone. व्युत्क्रम शंकु को परिभाषित कीजिए।
6. Find the cartesian equation of a right circular cylinder whose radius is a and axis is z -axis.
उस लम्बवृत्तीय बेलन का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या a तथा अक्ष, z - अक्ष है।
7. Find the equations of the two tangent planes to the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, which are parallel to the plane $lx + my + nz = 0$.
केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ पर समतल $lx + my + nz = 0$ के समान्तर दो स्पर्श तलों के समीकरण ज्ञात करिए।
8. If ϕ is a scalar point function and a is a vector, then prove that -
यदि ϕ एक अदिश बिन्दु फलन तथा a एक सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि -

$$(a \cdot \nabla)\phi = a \cdot (\nabla\phi)$$

9. From Gauss divergence theorem deduces that -

$$\int_V B \text{curl} A \, dv = \int_S (A \times B) \cdot \vec{n} \, ds + \int_V A \text{curl} B \, dv$$

where A and B are the vector point function & ϕ is scalar point function.
गॉस अपसरण प्रमेय से निगमन कीजिए -

$$\int_V B \text{curl} A \, dv = \int_S (A \times B) \cdot \vec{n} \, ds + \int_V A \text{curl} B \, dv$$

जहाँ A तथा B सदिश बिन्दु फलन तथा ϕ अदिश बिन्दु फलन है।

10. Write the statement of Stoke's theorem. स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए।

Part - B

11. Show that the latus rectum of the following parabola is -
सिद्ध कीजिए कि निम्न परवलय की नाभिलम्ब होती है।

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (bx + ay - ab)^2$$

12. Find the equation of the sphere which pass through (α, β, γ) and the circle $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$

बिन्दु (α, β, γ) और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2; z = 0$ से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. Find the locus of the centres of sections of a conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ that are at a constant distance d from the centre.
केन्द्र से अचर दूरी d वाले शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के परिच्छेदों के केन्द्रों का

बिन्दुनय ज्ञात कीजिए।

14. If $|\gamma| = r$ and $\gamma = xi + yj + zk$, then prove that -

$$\text{div}(\gamma \text{grad} r^3) = 3r^4$$

यदि $|\gamma| = r$ तथा $\gamma = xi + yj + zk$, हो तो सिद्ध कीजिए कि -

$$\text{div}(\gamma \text{grad} r^3) = 3r^4$$

15. Use Gauss's Divergence theorem to evaluate

$$\int_S (4xi - 2y^2j + z^2k) \cdot \hat{n} ds,$$

where S is the surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 4$, $a = 0$ to $z = 3$

गॉस - अपसरण प्रमेय की सहायता से मान ज्ञात कीजिये -

$$\int_S (4xi - 2y^2j + z^2k) \cdot \hat{n} ds,$$

जहाँ S बेलन $x^2 + y^2 = 4$, $a = 0$ से $z = 3$ की सतह है।

Parts - C

Unit - I

16. Find the nature of the conic represented by the equation $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 1 = 0$ and trace it also.

समीकरण $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 1 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शंकु की प्रकृति ज्ञात कीजिए

एवं इसका अनुरेखण भी कीजिए। <http://www.rtuonline.com>

OR

- (a) Find the equation of the chord joining the points P (r_1, θ_1) and Q

(r_2, θ_2) on the circle $r = 2a \cos \theta$

वृत्त $r = 2a \cos \theta$ पर स्थित बिन्दु P (r_1, θ_1) Q (r_2, θ_2) को मिलाने वाली जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the polar equation of the normal at any point of a conic.

शंकु के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

Unit - II

17. (a) Find the equation of the sphere passing through $(-1, 0, 0)$ and touching the following sphere at $(1, 2, -2)$.

$(-1, 0, 0)$ से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निम्न गोले

को $(1, 2, -2)$ पर स्पर्श करता है:

$$4(x^2 + y^2 + z^2) + 10x - 25y - 2z = 0$$

- (b) Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base is

$$\text{the guiding curve } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) तथा आधार

निर्देशक वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ है।

OR

17. (a) A tangent plane to the ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ meets the coordinate axes in points A, B and C respectively. Prove that the locus for the centroid of the triangle ABC is -

दीर्घवृत्त $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ का कोई स्पर्श तल अक्षों को क्रमशः A, B, C बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिन्दुपथ है:

$$a^2/x^2 + b^2/y^2 + c^2/z^2 = 9.$$

- (b) Find the equation of the plane through the extremities of three conjugate semi - diameters of an ellipsoid and show that it touches a fixed sphere. दीर्घवृत्त के तीन सयुग्मी अर्धव्यासों के छोरों से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि यह एक स्थिर गोले को स्पर्श करता है।

Unit - III

18. (a) Show that the surface $5x^2 - 2yz = 9x$ is orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 4$ at the point (1, -1, 2).

सिद्ध कीजिए कि सतह $5x^2 - 2yz = 9x$ तथा सतह $4x^2y + z^3 = 4$ बिन्दु (1, -1, 2) पर समकोणिक है।

- (b) If a and b are constant vectors, then prove that: यदि a तथा b अचर सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{Curl}[(\gamma \times a) \times b] = b \times a.$$

OR

18. (a) Verify Stoke's theorem for $F = (x^2 + y^2) i - 2xy j$ taken round the rectangle bounded by -

$$x = \pm a, y = 0, y = b.$$

फलन $F = (x^2 + y^2) i - 2xy j$ के लिए स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ समाकलन रेखा $x = \pm a$ तथा $y = 0, y = b$ से परिबद्ध आयत के अनुदिश किया जाता है।

- (b) Show that the area bounded by a simple closed curve C is given by

$$\frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx). \text{ Hence find the whole area of the ellipse.}$$

दर्शाइये कि एक सरल बन्द वक्र C द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल समाकल $\frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)$ द्वारा प्राप्त होता है। इस प्रकार दीर्घवृत्त का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।