

MATHEMATICS

Paper- III : Vector Calculus and Geometry)

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

1. Write the combined equation of asymptotes of conic.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

शंकाव $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के अन्तर्गत स्पर्शियों का संयुक्त समीकरण लिखिये।
2. Trace the parabole $1/r = 1 + \cos\theta$
 परवलय $1/r = 1 + \cos\theta$ का अनुरेघण कीजिये।
3. Write the equation of the polar at any point (r_1, θ_1) with respect to
 conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos\theta$

शंकाव (r_1, θ_1) के सापेक्ष बिन्दु $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos\theta$ की ध्रुवी का समीकरण लिखिए।
4. Write the co-ordinate of pole of the plane $lx + my + nz = p$ w.r. to
 sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

समतल $lx + my + nz = p$ w.r. का गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के सापेक्ष ध्रुव के निर्देशांक लिखिए।
5. Find the semi verticle angle of right circular cone $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$
 लम्बवृत्तीय शंकु $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$ का अर्ध शीर्ष कोण ज्ञात कीजिये।

6. Define enveloping cylinder. अन्वालोपी बेलन की परिभाषा लिखिए।
7. Define conjugate diametral plane. संयुगमी व्यासग समतल को परिभाषित कीजिए।
8. Show that vector $\mathbf{f} = (x+y) \mathbf{i} + (y-3z) \mathbf{k} + (x-2z)\mathbf{k}$ is solenoidal. बताइये कि सदिश $\mathbf{f} = (x+y) \mathbf{i} + (y-3z) \mathbf{k} + (x-2z)\mathbf{k}$ एक परिनालकीय है।
9. Show $\operatorname{curl} \operatorname{grad} u = 0$. सिद्ध कीजिए कि $\operatorname{grad} u = 0$.
10. Write the Green's theorem. ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।

Part-B (Compulsory)

11. Find the equation of axes of conic $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$. शंकाव $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$ के अक्षों के समीकरण ज्ञात कीजिए।
12. Find the centre and radius of circles -
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 11, x + 2y + 2z = 15$
 वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 11, x + 2y + 2z = 15$ का केंद्र व त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
13. Find the equation of planes which contain the line -
 $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ and touches $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$
 उन समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$ गुजरते हैं तथा दीर्घवृत्तज $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ को स्पर्श करते हैं।
14. If $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ and $r = |\mathbf{r}|$; then prove that -
 $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n + 3) r^{n-1}$ यदि $\mathbf{r} = xi + yj + zk$ तथा $r = |\mathbf{r}|$; तो सिद्ध कीजिए - $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n + 3) r^{n-1}$
15. Use Cartesian form of Gauss's Divergence theorem to evaluate
 $\int \int \int \{(2xy + z^3) dy dz + 3xz^2 dx dy\},$
 where S is surface of cube bounded by co-ordinate plane and plane
 $x = y = z = 1$. गॉस प्रमेय के कार्तीय रूप का प्रयोग करते हुए मान ज्ञात कीजिए
 $\int \int \int \{(2xy + z^3) dy dz + 3xz^2 dx dy\}$, जहाँ S उस घन का पृष्ठ से जो निर्देशी
 समतलों तथा समतल $x = y = z = 1$ से परिबद्ध है।

Part-C (भाग-स)

16. Trace the curve $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$
 वक्र $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$ का अनुरेखन कीजिए।

Or/ अथवा

- (a) Find the condition that the straight line $1/r A \cos \theta + B \cos \theta$ may touch the circle $r = 2a \cos \theta$
 वृत्त प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा $1/r A \cos \theta + B \cos \theta$ वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करे।
- (b) Find the locus of pole of a chord of conic $1/r = 1 + e \cos \theta$ which subtends a constant angle 2α at the locus.

UNIT-II (इकाई-II)

- 17.(a) A sphere of constant radius $2k$, passes through the origin and meets the axes in A, B, C. Show that the locus of centroid of the tetrahedron is $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$

अचर त्रिज्या $2k$ का एक गोला मूल बिन्दु 0 से गुजरता है और निर्देशी अक्षों क्रमशः A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिये कि चतुर्षलक के केन्द्र का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$ है।

- (b) Find the equation of a right circular cylinder whose axis is $x-2/2 = y-1/1 = z/3$ and which passes through (0,0,1)

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्ष $x-2/2 = y-1/1 = z/3$ है तथा जो बिन्दु (0,0,1) से गुजरता है।

Or/ अथवा

- (a) Prove that the locus of poles of tangent planes of $ax^2 + by^2 + cy^2 = 1$ w.r.t. $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma^2 = 1$ is $a^2x^2/a + \beta^2y^2/b + \lambda^2z^2/c = 1$
सिद्ध कीजिए कि $ax^2 + by^2 + cy^2 = 1$ के सापेक्ष $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma^2 = 1$ को स्पर्श तलों के द्वारा का बिन्दुपथ $a^2x^2/a + \beta^2y^2/b + \lambda^2z^2/c = 1$ होगा।

- (b) Prove that the feet of six normal's form (α, β, γ) to the ellipsoid lie $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ lie on the curve of intersection of the ellipsoid and the cone $\sum a^2(b^2 - c^2)/x = 0$.

सिद्ध कीजिए कि (α, β, γ) से दीर्घवृत्तज $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ पर खींची छः अभिलम्बों के पाद दीर्घवृत्तज तथा शंकु $\sum a^2(b^2 - c^2)/x = 0$ के प्रतिच्छेद वक्र पर स्थित है।

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) Verify Gauss's Divergence theorem and show that -

$\int F \cdot n \, ds = 1/3a^5$, where $F = (x^3 - yz) i - 2x^2yj + 2k$ and S is the surface of the cube bounded by co-ordinate planes $x = y = z = 0; x = y = z = a$.

गॉस प्रमेय को सत्यापित करते हुए दर्शाइये कि $\int F \cdot n \, ds = 1/3a^5$ जहाँ $F = (x^3 - yz) i - 2x^2yj + 2k$ तथा S निम्न निर्देशांक समतलों द्वारा परिबद्ध का पृष्ठ है $x = y = z = 0; x = y = z = a$

Or/ अथवा

- (a) Verify Stoke's theorem for function $F = x^2i + xyz$ integrated round the square in plane $z = 0$, whose sides are along the line $x = y = 0$ and $x = y = a$.

फलन $F = x^2i + xyz$ के लिए स्टॉक प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ F का समाकलन तल $z = 0$ में स्थित वर्ग के चारों ओर किया गया है, जिसकी मुजाहें रेखा $x = y = 0$ तथा $x = y = a$ के अनुदिश हैं।