

B.A./B.Sc. (Part-II) EXAMINATION, 2012
MATHEMATICS
(First Paper)
(Advance Calculus)

Time Allowed : Three Hours M.M. : 75

Part-A भाग-अ (अनिवार्य) M.M.-15

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर बीस शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-B भाग-ब (अनिवार्य) M.M.-15

सभी पाँच प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-C भाग-स M.M.-45

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिये। प्रश्नों का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-A (भाग-अ)

1. Define Jacobian.

जेकोबियन को परिभाषित कीजिये।

2. Give definition of evolute.

केन्द्रज की परिभाषा दीजिये।

3. Show that $f(x) = \frac{1}{x-a}$ is discontinuous at $x = a$.

प्रदर्शित कीजिये कि $f(x) = \frac{1}{x-a}$ बिन्दु $x = a$ पर असंतत है।

4. State Darboux intermediate value theorem for derivatives.

अवकलजों के लिए डाबरों मध्यवर्ती मान प्रमेय का कथन कीजिये।

5. Define Beta function.

बीटा फलन को परिभाषित कीजिये।

6. Evaluate (मान ज्ञात कीजिये)-

$$\int_1^2 \int_0^2 (x+y) dx dy$$

7. State Dirichlet's integral.

डिरिच्लेट समाकल का कथन कीजिये।

8. Give definition of bounded sequence.

परिबद्ध अनुक्रम की परिभाषा दीजिये।

9. Show that the following series is convergent for all values of x –
प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी x के सभी मानों के लिए अभिसारी है–

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{4^3} + \dots$$

10. Define absolute convergence.

निरपेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

Part-B (भाग-ब)

11. If $u = e^{xyz}$, then prove that–

यदि $u = e^{xyz}$ तब सिद्ध कीजिये–

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$$

12. Find the envelope of the family of the straight lines $y = mx + a/m$, where m is a parameter.

रेखा $y = mx + a/m$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जहाँ m प्राचल है।

13. Evaluate (मान ज्ञात कीजिये)–

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

14. Show that every convergent sequence is bounded.

प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

15. Examine whether the following series is convergent or divergent–
जाँच कीजिये कि निम्न श्रेणी अभिसारी है या अपसारी–

$$\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \frac{1}{\sqrt{3.4}} + \dots$$

Part-C (भाग-स)

Unit-I (इकाई-I)

16. (a) Find the points where the function $x^3 + y^3 - 3axy$, has maximum or minimum value.

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिये जहाँ फलन $x^3 + y^3 - 3axy$ का मान उच्चतम या न्मूलतम हो।

- (b) If $U = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ then prove that–

यदि $U = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ तब सिद्ध कीजिये–

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

17. (a) Show that the function $f(x) = |x|, \forall x \in R$ is continuous but not differentiable at $x = 0$.

प्रदर्शित कीजिये कि फलन $f(x) = |x|, \forall x \in R$ बिन्दु $x = 0$ पर संतत किन्तु अवकलनीय नहीं है।

- (b) If $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h)$, where $f(x) = x^3 + x$, then find the value of θ .

यदि $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x+\theta h)$ जहाँ $f(x) = x^3 + x$ तो θ का मान ज्ञात कीजिये।

Unit-II (इकाई-II)

18. (a) Show that (प्रदर्शित कीजिये)-

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

- (b) Evaluate the following integral by changing the order of integration-

निम्न समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिये-

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

19. (a) If f be a real valued bounded function defined on $[a, b]$ and M and m are supremum and infimum of f in $[a, b]$ then prove that-

यदि फलन $f[a, b]$ पर परिभाषित परिसीमित वास्तविक फलन हो तथा M, m फलन f के $[a, b]$ में क्रमशः उच्चक व निम्नक हो तो सिद्ध कीजिये-

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a), \forall P \in P[a, b]$$

- (b) If f is defined on $[a, b]$ by $f(x) = k \forall x \in [a, b]$ where k is constant, then prove that-

सिद्ध कीजिये कि अचर फलन R समाकलनीय होता है या यदि फलन $f(x) = k$ जहाँ k अचर है तो-

$$f \in R[a, b] \text{ and } \int_b^a f(x) dx = k(b-a)$$

Unit-III(इकाई-III)

20. (a) Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent and also find its limit-
 सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है तथा इसकी सीमा ज्ञात कीजिये-

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{4 + 3x_n}{3 + 2x_n}, n \geq 1$$

- (b) Examine the following series for convergence-
 निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए-

$$\sum \frac{2^2 4^2 6^2 \dots (2n-2)^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n)} x^n$$

21. (a) State Weierstrass M -test for uniform convergence and show that the following series is uniformly convergent-
 एक समान अभिसरण के लिए वायस्ट्रॉस M -परीक्षण को लिखिये तथा प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी एक समान अभिसारी श्रेणी है-

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \dots + \frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}} + \dots (-1 < x < 1)$$

- (b) Find Fourier series for the following function-
 निम्न फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिये-

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi$$