



2301

**B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2022**  
**MATHEMATICS**  
**First Paper**  
**(Abstract Algebra)**

*Duration of Examination: 1½ Hrs.*  
 परीक्षा की अवधि: 1½ घण्टा

*Max. Marks: 38*  
 पूर्णांक: 38

**Instructions to the Candidates:**

**परीक्षार्थी के लिए निर्देश:-**

**Part-A (Compulsory)**

Answer any five questions (upto 20 words each). Each question carries two marks.

कोई पांच प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। प्रत्येक प्रश्न दो अंक का है। (5x1=5 Marks)

**Part-B (Compulsory)**

Answer any three questions (upto 100 words each). Each question carries five marks.

कोई तीन प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये। प्रत्येक प्रश्न पांच अंक का है। (3x5=15 Marks)

**Part-C (Compulsory)**

Candidate is required to attempt any two question. (upto 400 words)

कोई दो प्रश्न का उत्तर दीजिये। प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये।

(2x9=18 Marks)

**Part-A / भाग-अ**

- Q-1. Give an example of group of order 4 having each element (except identity) of order 2.  
 ऐसे 4 कोटि के समूह का उदाहरण दीजिये जिसमें तत्समक के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव की कोटि 2 हो।
- Q-2. Define cyclic Group.  
 चक्रीय समूह को परिभाषित करो।
- Q-3. State Fermat's Theorem.  
 फर्मा प्रमेय का कथन करो।
- Q-4. In a group G prove that  $\alpha(a^{-1}b) = \alpha(ab^{-1})$ ,  $\forall a, b \in G$   
 समूह G में सिद्ध करो  $\alpha(a^{-1}b) = \alpha(ab^{-1})$ ,  $\forall a, b \in G$
- Q-5. Define simple Group.  
 सरल समूह को परिभाषित करो।
- Q-6. Define Hamiltonian group.  
 हेमिल्टोनियन समूह को परिभाषित करो।
- Q-7. Define Alternating group.  
 एकान्तर समूह को परिभाषित करो।
- Q-8. Define Euclidean Ring.  
 यूक्लिडीय वलय को परिभाषित करो।
- Q-9. Define characteristic of a ring.  
 वलय के अभिलक्षण को परिभाषित करो।
- Q-10. State factor theorem on polynomials.  
 बहुपद के लिए खण्ड प्रमेय का कथन करो।



- Q-11. Prove that every cyclic group is abelian.  
सिद्ध करो प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली होता है।
- Q-12. Prove that the intersection of any two subgroups of a group  $G$  is again a subgroup of  $G$   
सिद्ध करो किसी समूह  $G$  के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ  $G$  का उपसमूह होता है।
- Q-13. Prove that A subgroup  $H$  of a group  $G$  is a normal subgroup iff  
 $H \triangleleft G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H \quad \forall x \in G$   
सिद्ध करो किसी समूह  $G$  का कोई उपसमूह  $H$  एक प्रमामान्य उपसमूह होता है यदि कि  
 $H \triangleleft G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H \quad \forall x \in G$
- Q-14. Prove that if  $f$  is a homomorphism from a group  $G$  to  $G'$  with Kernel  $K$  then  $K \triangleleft G$ .  
सिद्ध करो यदि  $f$  समूह  $G$  से  $G'$  पर एक समाकारिता हो तो  $f$  की अष्टि  $K \triangleleft G$
- Q-15. Prove that the intersection of two ideals of a ring is again an ideal of the ring.  
सिद्ध करो किसी वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस वलय की गुणजावली होती है।

## Part-C / भाग-स

## Unit-I / इकाई-I

- Q-16. Prove that if order of an element  $a$  of a group  $(G, *)$  is  $n$  then  $a^m = e \Leftrightarrow m$  is a multiple of  $n$ .  
सिद्ध करो यदि किसी समूह  $(G, *)$  के एक अवयव  $a$  की कोटि हो  $n$  तो  $a^m = e \Leftrightarrow m$  .  $n$  का गुणज हो

OR / अथवा

State and Prove Lagrange's theorem on subgroups.

उपसमूह की लेग्रान्ज प्रमेय का कथन कर सिद्ध करो।

## Unit-II / इकाई-II

- Q-17. State and prove Cayley theorem.  
कैली प्रमेय का कथन कर सिद्ध करो।

OR / अथवा

$$\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$$

$$\text{If (यदि) } \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then Prove that (तब सिद्ध करो)

- (i)  $\rho \sigma \rho^{-1} = (e(1)\ e(7)\ e(2)\ e(6)\ e(3)\ e(5)\ e(8)\ e(4))$
- (ii) Find order of  $\rho$   
 $\rho$  की कोटि ज्ञात करो।
- (iii) Whether  $\rho$  is an even or odd permutation?  
 $\rho$  सम क्रमचय है या विषम ?

## Unit-III / इकाई-III

- Q-18. Prove that every homomorphic image of a ring  $R$  is isomorphic to some quotient ring.  
सिद्ध करो किसी वलय  $R$  का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्याकारी होता है।

OR / अथवा

If  $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$  and  $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$  are two polynomials over the ring  $(z_6, +_6, \cdot_6)$  then find  $f(x).g(x)$  and  $\deg [f(x).g(x)]$

यदि वलय  $(z_6, +_6, \cdot_6)$  में  $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$  तथा  $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$  कोई दो बहुपद हैं तो ज्ञात करो।

$f(x).g(x)$  तथा  $\deg [f(x).g(x)]$